Resolución numérica de ecuaciones no lineales

Son muchas las situaciones en las que se presenta el problema de obtener las soluciones de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$. En algunos casos existe una fórmula de resolución, pero existen muchas ecuaciones que no admiten fórmula de resolución. Para este tipo de ecuaciones existen métodos de aproximación a las soluciones. Estos métodos también se usan en ecuaciones en las que, existiendo fórmula de resolución, la solución es un número muy "complicado" y es necesario aproximarla para su manejo. La idea es obtener una sucesión $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ que converge a un punto c tal que $f(c) = 0$.

Estos métodos se basan en el teorema de Bolzano que asegura la existencia de, al menos , una raíz de una función $f(x) = 0$ en un cierto intervalo $[a, b]$, bajo ciertas condiciones. Si además f es derivable en (a, b) y f' no se anula en dicho intervalo, la raíz es única.

Teorema de Bolzano

Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, y en los extremos del intervalo f toma valores de signo contrario ($f(a)f(b) < 0$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

1. Método de la bisección

Sea $f : [a, b] \longrightarrow I\!R$ continua y de modo que $f(a)f(b) < 0$, para encontrar un punto c tal que $f(c) = 0$ se procede como se expone a continuación.

Se evalua la función f en el punto medio del intervalor $[a, b]$:

Si $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, entonces $c = \frac{a+b}{2}$.

Si $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, elegimos uno de los subintervalos $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ o $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ en cuyos extremos f tomo valores de signo opuesto. A este intervalo lo denotamos por $[a_1, b_1]$ y tendrá por longitud la mitad de la del intervalo inicial $[a, b]$.

A continuación se considera el intervalo $[a_1, b_1]$ y se procede de igual modo para obtener el intervalo $[a_2, b_2]$.

Reiterando el proceso se tendrá, o bien la raíz exacta, o bien una sucesión de intervalos encajados

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

cuya intersección es un punto $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, que verifica que $f(c) = 0$.

Por otro lado, se tiene que cualquier punto del intervalo $[a_n, b_n]$ proporciona una aproximación de c con un error menor que la longitud del intervalo. Por lo que, si $x \in [a_n, b_n]$,

$$|c - x| < \frac{1}{2^n}(b - a)$$

El algoritmo consiste en repetir el proceso de subdivisión hasta encontrar c, o bien llegar a un intervalo de longitud menor que el error admisible.

Si como aproximación de c tomamos el punto medio de $[a_n, b_n]$, tendremos la misma cota para el error con una iteración menos.

Ejemplo

Obtener la solución aproximada de la ecuación $e^x + x = 0$ con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$.

La función $f(x) = e^x + x$ es continua y derivable en todo $I\!R$. La derivada $f'(x) = e^x + 1$ es positiva para todo $x \in I\!R$. Por tanto f tiene como máximo una raíz.

Como $f(0) = 1 > 0$ y $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, la única raíz de f está en el intervalo $[-1, 0]$.

Evaluamos la función en el punto medio del intervalo, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} - \frac{1}{2} > 0$ y como $f(-1) < 0$, la raíz se encuenta en $[a_1, b_1] = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

El punto medio de este intervalo es $-\frac{3}{4}$ y $f\left(-\frac{3}{4}\right) = e^{-3/4} - \frac{3}{4} < 0$ y como $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, la única raíz de f está en el intervalo $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$.

De esta manera se continúa el proceso dividiendo cada intervalo hasta encontrar la raíz o llegar a un intervalo de longitud menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$. Como la longitud del intervalo inicial es 1, se deberá repetir el proceso n veces, con n verificando que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}10^{-3}$, lo que se consigue con $n > 10,97$, es decir, con $n = 11$ o bien con $n = 10$ si se da como aproximación el punto medio del último intervalo.

A continuación se dan los intervalos obtenidos repitiendo el proceso once veces.

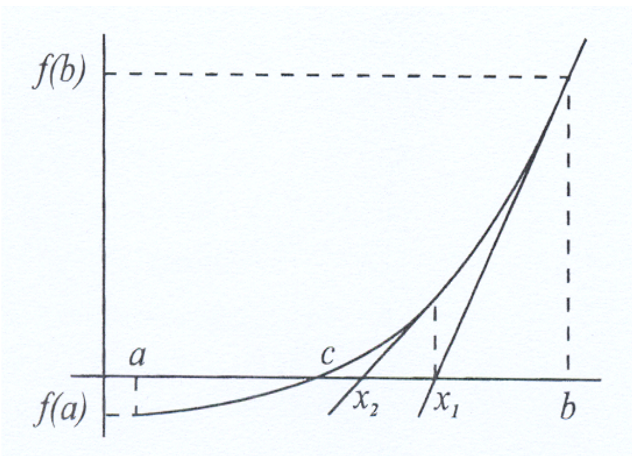
$$[-1, 0]$$
$$[-1, -0,5]$$
$$[-0,75, -0,5]$$
$$[-0,625, -0,5]$$
$$[-0,625, -0,5625]$$
$$[-0,59375, -0,5625]$$
$$[-0,578125, -0,5625]$$

$$[-0,5703125, -0,5625]$$
$$[-0,5703125, -0,56640625]$$
$$[-0,568359375, -0,56640625]$$
$$[-0,5673828125, -0,56640625]$$
$$[-0,5673828125, -0,5668945312]$$

Por lo que -0,567 es una aproximación a c con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$.

2. Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson se basa en la idea de aproximar una curva por su tangente en un punto. Este método consiste en considerar, en cada iteración $n-1$, la recta tangente a $f(x)$ en $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y tomar como siguiente aproximación x_n la intersección de dicha tangente con el eje de abscisas.



Por tanto, teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ es

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}),$$

se tiene que

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Teorema. Condiciones de convergencia del método de Newton

Sea f una función continua y dos veces derivable en un conjunto que contenga al intervalo $[a, b]$. Supongamos que

i) $f(a)f(b) < 0$.

ii) f'' tiene signo constante en $[a, b]$.

Entonces, si $x_0 \in [a, b]$ es un punto cualquiera en el que se verifica $f(x_0)f''(x_0) > 0$, la sucesión (x_n) definida por

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

converge al punto c tal que $f(c) = 0$.

Las hipótesis del teorema garantizan que $f'(x)$ es distinta de cero en un intervalo que contiene a c y a x_0.

Observaciones

- Es el más rápido.

- Puede ser difícil elegir el punto x_0.

- La acotación del error es complicada.

- El criterio de parada más usual es cuando la diferencia entre dos iteraciones consecutivas sea suficientemente pequeña.

Ejemplo

Obtener la solución aproximada de la ecuación $e^x + x = 0$.

La función $f(x) = e^x + x$ es continua y dos veces derivable en todo $I\!R$.

Si consideramos el intervalo $[-1, 0]$ se tiene que $f(0) = 1 > 0$ y $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, por lo que $f(-1)f(0) < 0$.

Por otro lado $f''(x) = e^x > 0$ en todo $I\!R$.

Entonces, tomando como valor inicial $x_0 = 0$, ya que $f(0)f''(0) > 0$, se cumplen las condiciones del teorema de convergencia, por lo que la sucesión (x_n) definida por

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

converge al punto c tal que $f(c) = 0$.

A continuación se dan los valores obtenidos en las cinco primeras iteraciones.

$x_0 = 0$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0} = 0 - \frac{e^0 + 0}{e^0 + 1} = -0,5$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1} = -0,5 - \frac{e^{-0,5} - 0,5}{e^{-0,5} + 1} = -0,5663110031$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2} = -0,5663110031 - \frac{e^{-0,5663110031} - 0,5663110031}{e^{-0,5663110031} + 1} = -0,5671431650$

$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3} = -0,5671431650 - \frac{e^{-0,5671431650} - 0,5671431650}{e^{-0,5671431650} + 1} = -0,5671432904$

$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4} = -0,5671432904 - \frac{e^{-0,5671432904} - 0,5671432904}{e^{-0,5671432904} + 1} = -0,5671432904$

Como se puede ver a partir de la tercera iteración los seis primeros decimales coinciden, por lo que $c \approx -0,567143$.

3. Método iterativo del punto fijo

Este método se puede usar cuando sea posible encontrar una función g que verifique ciertas condiciones y de modo que $f(x) = 0$ si y sólo si $g(x) = x$, por lo que el problema de encontrar una raíz para f es equivalente a encontrar un punto fijo para g, es decir, un punto c tal que $g(c) = c$.

Teorema. Método del punto fijo

Si $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ es continua y contractiva, entonces para cualquier valor inicial $x_0 \in [a, b]$ el proceso de iteración $x_n = g(x_{n-1})$ proporciona una sucesión convergente al único punto $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = c$.

Definición. Aplicación contractiva

Una aplicación $g : [a, b] \longrightarrow I\!R$ se dice que es contractiva si existe $k \in I\!R$, con $0 < k < 1$, de modo que

$$|g(x) - g(y)| \leq k\,|x - y| \qquad \text{para todo } x, y \in [a, b].$$

A la constante k se le denomina constante de contractividad.

Nota: Por el teorema del valor medio, si g es derivable en (a, b) y existe k con $0 < k < 1$ de manera que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in [a, b]$, entonces g es contractiva en $[a, b]$.

Teorema del valor medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Estimación del error

En las condiciones del teorema del método del punto fijo, si k es la constante de contractividad de g, se verifica que

$$|x_n - c| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|.$$

Observación: Si k está próximo a 1, el error puede ser grande, aunque $|x_n - x_{n-1}|$ sea pequeño. El método funciona bien cuando k es "mucho menor" que 1.

Ejemplo

Obtener la solución aproximada de la ecuación $e^x + x = 0$ con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$.

La función $f(x) = e^x + x$ es continua.

Si consideramos el intervalo $[-1, -0,5]$ se tiene que $f(-0,5) > 0$ y $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, por lo que f tiene al menos una raíz en el intervalo $[-1, -0,5]$. Por otro lado $f'(x) = e^x + 1 > 0$ en todo $\mathbb{R}$, luego f tiene una única raíz en el intervalo $[-1, -0,5]$.

Hay que encontrar una función g que cumpla las condiciones del teorema del método del punto fijo y tal que $f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x$. Despejando en la ecuación $e^x + x = 0$, se tiene que $x = -e^x$. Por tanto, tomamos $g(x) = -e^x$ que es una función continua. Tenemos que ver también que g es contractiva, para lo que comprobamos que $|g'(x)| \leq k$ con $0 < k < 1$.

$|g'(x)| = e^x$ no se anula nunca, por lo que los posibles valores extremos en el intervalo $[-1, -0,5]$ se alcanzarán en los extremos de este intervalo, concretamente, el máximo se alcanza para $x = -0,5$ ya que la función e^x es creciente. Por tanto $|g'(x)| \leq e^{-0,5} \approx 0,61 < 1$, por lo que la función g es contractiva siendo $k = 0,61$ la constante de contractividad.

Tomando como valor inicial $x_0 = -0,5$ y aplicando el proceso de iteración $x_n = g(x_{n-1})$ se obtiene una sucesión que converge al único punto $c \in [-1, -0,5]$ tal que $g(c) = c$ o, equivalentemente, $f(x) = 0$.

Como $|x_n - c| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|$ y queremos un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, es decir, $|x_n - c| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-3}$ siendo $k = 0,61$, se deberá repetir el proceso hasta que $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-k}{k}\frac{1}{2}10^{-3} = 0,00032436$.

A continuación se dan los valores obtenidos

(x_n): -0,5, -0,60653066, -0,54523921, -0,57970309, -0,56006463, -0,57117215, -0,56486295, -0,56843805, -0,56640945, -0,56755963, -0,56690721, -0,5672772, -0,56706735.

$|x_n - x_{n-1}| \approx$ -0,11, 0,06, 0,03, 0,02, 0,01, 0,006, 0,0,0036, 0,002, 0,001, 0,0006, 0,00037, 0,00021.

Luego $c \approx -0,5671$ redondeando a cuatro dígitos, necesitando $n = 12$ iteraciones.